Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica mod. 2

Prof. R. Ghiselli Ricci, D. Pasetto

Tema A - 05/09/2024
Tempo a disposizione: 2h

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Voto Analisi Matematica mod 1: ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. È permesso utilizzare un formulario personale scritto su un foglio A4 (fronte/retro).
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Si potrà abbandonare l'aula solo al termine delle operazioni di consegna, rispettando le indicazioni dei docenti.

Problema 1 (8 punti)

1.1 Abbozzare il grafico della seguente funzione: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}} - 2$ con $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

1.2 Sia D_1 la porzione del piano compresa tra il grafico di f, la retta $y = -2$ e con $x > 0$. Spiegare se D_1 ha area finita, e, in caso affermativo, calcolarla.

1.3 Sia D_2 la porzione del piano compresa tra il grafico di f, la retta $y = -2$ e con $-\frac{1}{2} < x < 0$. Spiegare se D_2 ha area finita, e, in caso affermativo, calcolarla.

Problema 2 (7 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos|\pi t|, \sin|\pi t|), \quad t \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

2.1 Determinare se γ è chiusa, semplice e regolare.

2.2 Disegnare qualitativamente il sostegno e indicare il verso di percorrenza.

2.3 Calcolare un'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta tangente a γ in $t = -1/4$.

Problema 3 (11 punti)

Sia $f(x, y) = 4\log(x^2 - 4y^2) - x^2$.

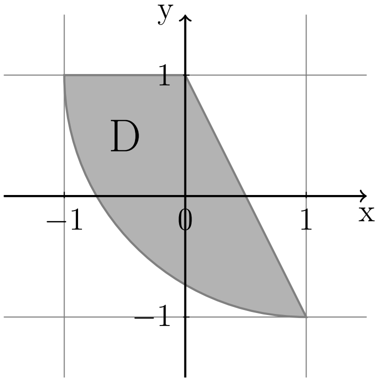
3.1 Determinare il dominio di f e disegnarlo. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

3.2 Mostrare che f ha due estremi locali che sono di massimo relativo. DIFFICILE: mostrare che i due punti di massimo sono globali e determinare l'immagine di f.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(-1, 0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(1, 1)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'integrale di $f(x, y) = 8(x-1)y$ su D.



Soluzioni

Problema 1

1. Abbozzare il grafico della seguente funzione: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}} - 2$ con $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

   (2p totali)

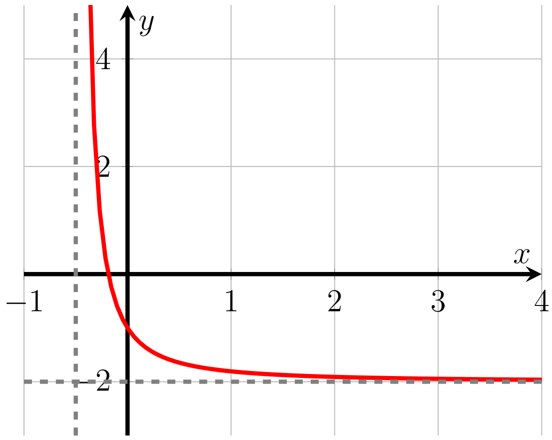


Figura 1: Grafico di $y = f(x)$ e dei suoi due asintoti, $x = -1/2$ e $y = -2$.

2. Sia D_1 la porzione del piano compresa tra il grafico di f, la retta $y = -2$ e con $x > 0$. Spiegare se D_1 ha area finita, e, in caso affermativo, calcolarla.

   (4p totali)

   La porzione di piano è illimitata ma la sua area è finita in quanto $f(x)$ si avvicina all'asintoto $y = -2$ con la stessa velocità con cui $g(x) = 1/x^{3/2}$ si avvicina all'asse delle x. Siccome una funzione del tipo $y = 1/x^p$ è integrabile ad infinito se $p > 1$, allora $g(x)$ (e $f(x)$) sono integrabili. 1p

   L'area si può calcolare dal seguente integrale:

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}} - 2 - (-2)\, dx = \left[-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right]_0^t = -\frac{1}{\sqrt{2t+1}} + 1 \qquad (1)$$

   Quando $t \to \infty$ si ha che l'area vale 1.3p

3. Sia D_2 la porzione del piano compresa tra il grafico di f, la retta $y = -2$ e con $-\frac{1}{2} < x < 0$. Spiegare se D_2 ha area finita, e, in caso affermativo, calcolarla.

   (2p totali)

   La porzione di piano è illimitata e la sua area è infinita in quanto $f(x)$ si avvicina all'asintoto $x = -1/2$ con la stessa velocità con cui $g(x) = 1/x^{3/2}$ si avvicina all'asse delle y. Siccome una funzione del tipo $y = 1/x^p$ non è integrabile in 0 se $p > 1$, allora $g(x)$ (e $f(x)$) non sono integrabili. 2p

Problema 2

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos|\pi t|, \sin|\pi t|)\,, \quad t \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

2.1 Determinare se γ è chiusa, semplice e regolare.

(3p totali)

Si ha $\mathbf{r}(-3/2) = (0, -1)$ e $\mathbf{r}(3/2) = (0, -1)$, quindi γ è chiusa. (1p)

Per la semplicità, notiamo che $\mathbf{r}(-t) = \mathbf{r}(t)$ quindi chiaramente la curva non è semplice (ad esempio, basta prendere $t_1 = 1$ e $t_2 = -1$). (1p)

Possiamo mostrare che la curva non è regolare. L'unico punto in cui la curva potrebbe non essere derivabile è per $t = 0$ (valore che annulla l'argomento del valore assoluto) Notiamo infatti che $\mathbf{r}(t)$ si può riscrivere come:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = (2\cos(t\pi), -\sin(\pi t)) & , \quad t \in [-3/2, 0] \\ \mathbf{r}_2(t) = (2\cos(t\pi), \sin(\pi t)) & , \quad t \in [0, 3/2] \end{cases}$$

Derivando, si ottiene:

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1'(t) = (-2\pi\sin(\pi t), -\pi\cos(\pi t)) & , \quad t \in [-3/2, 0[\\ \mathbf{r}_2'(t) = (-2\pi\sin(\pi t), \pi\cos(\pi t)) & , \quad t \in]0, 3/2[\end{cases}$$

Pertanto, $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono regolari per $t \in [-3/2, 0[$ e $t \in]0, 3/2]$, ma in $t = 0$ il vettore tangente non è definito, perché $\mathbf{r}_1'(0) = (0, -\pi)$ e $\mathbf{r}_2'(0) = (0, \pi)$. (1p)

2.2 Disegnare qualitativamente il sostegno e indicare il verso di percorrenza.

(2p totali)

Il supporto di $\mathbf{r}_2(t)$ è un arco dell'ellisse di centro (0,0) e semiassi $a = 2$ e $b = 1$ (vedere figura, (1p)). L'arco viene percorso due volte, prima in senso orario (per t negativo) e poi antiorario (per t positivo). (1p).

2.3 Calcolare un'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta tangente a γ in $t = -1/4$.

(2p totali)

Abbiamo che $\mathbf{r}(-1/4) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2)$; $\mathbf{r}'(-1/4) = (-\pi\sqrt{2}, -\pi\sqrt{2}/2)$ Quindi un'equazione parametrica della retta tangente è (1p):

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2} - \pi\sqrt{2}(t + \frac{1}{4}) \\ y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \pi\frac{\sqrt{2}}{2}(t + \frac{1}{4}) \end{cases}$$

L'equazione cartesiana diventa: $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}$ (1p).

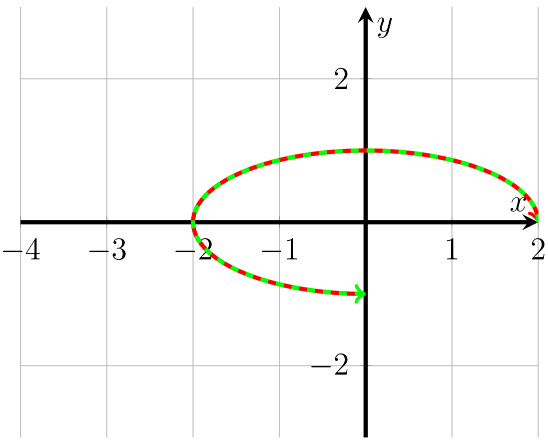


Figura 2: Supporto della curva parametrica ($\mathbf{r}_1$ in rosso, percorsa in senso orario, e $\mathbf{r}_2$ in verde, percorsa in senso antiorario).

Problema 3

Sia $f(x, y) = 4\log(x^2 - 4y^2) - x^2$.

3.1 Determinare il dominio di f e disegnarlo. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

(3 punti TOTALI)

Il dominio di f è dato da $x^2 - 4y^2 > 0$ per cui:

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2}|x| < y < \frac{1}{2}|x|\}$ Si tratta della regione del piano compresa tra i grafici di $y = \frac{1}{2}|x|$ e $y = -\frac{1}{2}|x|$ (rette non incluse) ((1 p)).

La sezione $x = 0$ non ammette punti. Il grafico della sezione $y = 0$ è in Figura 2.

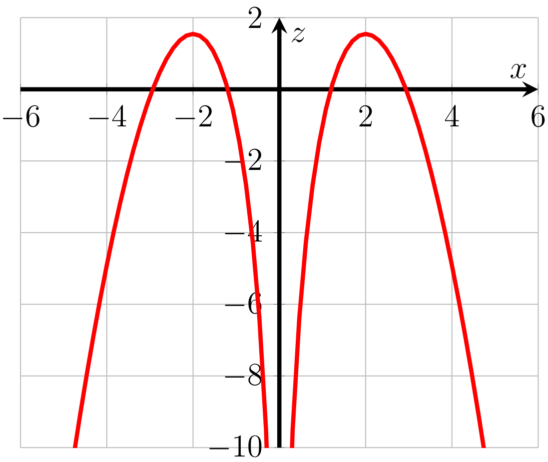


Figura 3: Sezione $y = 0$, $z = 4\ln(x^2) - x^2$. (1 p). La sezione $x = 0$ non ha punti. (1 p)

3.2 Mostrare che f ha due estremi locali che sono di massimo relativo. DIFFICILE: mostrare che i due punti di massimo sono globali e determinare l'immagine di f.

(6 punti totali)

Il gradiente di f è (1p):

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{8x}{x^2-4y^2} - 2x \\ \frac{-32y}{x^2-4y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8x-2x^3+8xy^2}{x^2-4y^2} \\ \frac{-32y}{x^2-4y^2} \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x,y) = 0$ si ottiene dalla seconda equazione $y = 0$. Sostituendo nella prima:

$$8x - 2x^3 = 2x(4 - x^2) = 0$$

da cui si ottengono i punti $(0,0)$, $(\pm 2, 0)$. Siccome $(0,0) \notin D_f$, i punti critici sono: $P_1 = (2,0)$, e $P_2 = (-2,0)$ (1p).

Si usa il test della matrice Hessiana per caratterizzare tali punti. Conviene porre $D(x,y) = x^2 - 4y^2$. In un punto (x,y) la matrice Hessiana H_f è (1p):

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= \frac{1}{D^2} \begin{pmatrix} 8D - 16x^2 - 2D^2 & 64xy \\ 64xy & -32D - 256y^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{D^2} \begin{pmatrix} -8x^2 - 32y^2 - 2x^4 - 32y^4 + 16x^2y^2 & 64xy \\ 64xy & -32x^2 - 128y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si noti che $D(2,0) = D(-2,0) = 4$.

Punti stazionari ((1p)):

- P_1: $H_f(2,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, det $(H_f(P_1)) > 0$ e il primo termine di $H_f(P_1)$ vale $-4 < 0$, quindi H_f è definita negativa in P_1 e P_1 è massimo locale.
- P_2: $H_f(-2,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, det $(H_f(P_2)) > 0$ e il primo termine di $H_f(P_2)$ vale $-1 < 0$, quindi H_f è definita negativa in P_2 e P_2 è massimo locale.

DIFFICILE (2p): Per mostrare che P_1 e P_2 sono di massimo globale bisogna notare che:

$$\log(x^2) \geq \log(x^2 - 4y^2) \quad \forall (x,y) \in D_f$$

cioé $f(x,0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D_f$. Quindi, se esiste il massimo globale, questo deve avere $y = 0$.

Concentriamoci quindi sulla funzione ad una variabile $g(x) = 4\log(x^2) - x^2$ definita su tutto l'asse dei numeri reali eccetto zero. Siccome la g é chiaramente pari, ci basta studiarla sul sottodominio $]0, +\infty[$ su cui vale $g(x) = 8\log(x) - x^2$, ossia la sezione giá analizzata in precedenza. I massimi globali di $g(x)$ saranno anche massimi globali di $f(x,y)$ (con ordinata pari a 0). Si ha che $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. Inoltre, non é difficile controllare che $g'(x) = 0$ si verifica solo in $x = 2$, pertanto i punti $x = -2$ e $x = 2$ sono punti di massimo per la g.

Per questo motivo P_1 e P_2 devono essere massimi globali.

Siccome $f(x, y)$ tende a $-\infty$ lungo la frontiera del dominio, si ha che l'immagine è $]-\infty, f(2,0)] =]-\infty, 4\log(4) - 4]$

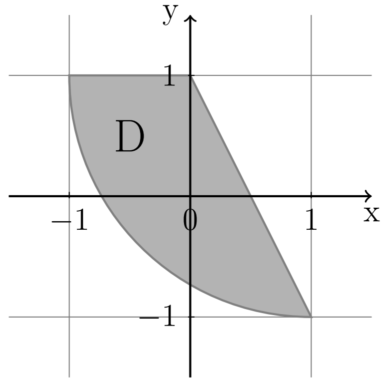
3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(-1, 0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

$\nabla f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quindi il versore tangente è $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il piano tangente ha equazione $z = -1 - 6(x + 1) = -7 - 6x$. (2p)

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(1, 1)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'integrale di $f(x, y) = 8(x - 1)y$ su D.



Il dominio D si può scrivere come un dominio y-normale: (2 p):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le y \le 1 \quad , \quad 1 - \sqrt{4 - (y-1)^2} \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y\}$$

Quindi l'integrale di f su D si ottiene da (4 p):

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{1-\sqrt{4-(y-1)^2}}^{1/2-1/2y} 8(x - 1)y\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} 8y \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]_{1-\sqrt{4-(y-1)^2}}^{1/2-1/2y} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} y \left(1 + y^2 + 2y - 16 + 4(y-1)^2\right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (5y^3 - 6y^2 - 11y)\, dy =$$

$$= (-6) \int_{-1}^{1} y^2\, dy =$$

$$= -4$$

Soluzione alternativa

Lo stesso risultato si può ottenere scrivendo il dominio come sottrazione di due insiemi: $D = D_1 \setminus D_2$ dove D_1 è il settore circolare che va dal centro (1,1) all'arco di circonferenza e D_2 è il triangolo di vertici ABC, con $A = (0, 1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$. D_1 si può scrivere in coordinate polari ($x = 1 + \rho\cos\theta$; $y = 1 + \rho\sin\theta$) come il dominio D_1', (1 p)

$$D_1' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le \rho \le 2 \quad , \quad \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}\}$$

D_2 si può scrivere come dominio x-normale (1 p):

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1 \quad , \quad -2x + 1 \le y \le 1\}$$

Quindi l'integrale di f su D si ottiene da :

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy - \int\int_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy$$

Su D_1: (2 p)

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy &= \int_0^2 \left(\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} 8\rho^2 \cos(\theta)(1 + \rho\sin(\theta))\, d\theta \right) d\rho = \\
&= \int_0^2 \left(\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} 8\rho^2 \cos(\theta)\, d\theta \right) d\rho + \int_0^2 \left(\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} 8\rho^3 \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta \right) d\rho = \\
&= \left[\frac{8\rho^3}{3}\right]_0^2 \left[\sin(\theta)\right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}} + \left[\rho^4\right]_0^2 \left[\sin^2(\theta)\right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}} = \\
&= -\frac{64}{3} + 16 = \frac{48 - 64}{3} = -\frac{16}{3}
\end{aligned}$$

Su D_2: (2 p)

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy &= \int_0^1 \left(\int_{-2x+1}^1 8(x - 1)y\, dy \right) dx = \\
&= \int_0^1 8(x - 1) \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2x+1}^1 dx = \\
&= \int_0^1 4(x - 1)(1 - 4x^2 + 4x - 1)\, dx = \\
&= 4 \int_0^1 -4x^3 + 8x^2 - 4x\, dx = \\
&= 4 \left[-x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 2x^2\right]_0^1 = 4(\frac{8}{3} - 3) = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Se ora svolgiamo la differenza tra i risultati dei due integrali appena svolti, il risultato finale richiesto é dato da $-16/3 + 4/3 = -12/3 = -4$.